

KÖRÍVEK, KÖRCIKKEK A MINDENNAPOKBAN

FELADATOK

- 1** A mindennapok során gyakran előforduló technikai feladat egy papírlap egyenletes mozgatása (például számítógéphez csatlakozó nyomtatók, pénztárgépek nyomtatóegységei, írógépek). A mechanikus megoldások igen egyszerű alapelven működnek: a papírtovábbítást forgó henger (hengerek) segítségével oldják meg. A papírlaphoz tapadó henger forgása közben mozgásba hozza („tolja”) a papírlapot.



Ha a papírlap nem csúszik meg, akkor az EE_h ív hossza egyenlő az EE_p szakasz hosszával (előző ábra). A nyomtatókban a henger forgását elektronika szabályozza.

Egy nyomtatóban a papírtovábbító henger átmérője 15,6 mm. A papíron 10 kinyomtatott sor és 10 sorköz együtt 49 mm.

- a)** Hány fokos szögelfordulásra ad parancsot az elektronika, ha egy sor kinyomtatásának befejezése után a következő sor nyomtatását kell megkezdeni?

- b)** Az A/4-es papírlap hossza 297 mm. Hány fokot fordul el a papírtovábbító henger, amíg a teljes lapot továbbítja? Hány teljes fordulatot tesz meg?
- c)** Az első sor nyomtatásának megkezdésétől számítva hányadik sor kinyomtatásakor lesz a papírtovábbító henger elfordulása összesen 540° ?
- d)** Egy másik nyomtatóban a papírtovábbító henger átmérője 20,4 mm. Hány mm-rel tolta előre ez a henger a papírt, amíg 154° -ot fordult el?
- (A fent leírt elv alapján működnek még a szállítószalagok és a mozgólépcsők is. Ezeknél a továbbító henger állandó, egyenletes forgása a követelmény.)

Megoldás:

Ez a feladat remek példa arra, hogyan válik a forgómozgás (ív hossz) egyenes vonalú mozgássá a gyakorlatban. A kulcs az, hogy a henger elfordulásának ívhossza megegyezik a papír elmozdulásával.

Használjuk a $\pi \approx 3,14$ értéket.

Alapadatok:

- Henger átmérője (d): **15,6 mm**
- Henger kerülete (K):
 $d \cdot \pi = 15,6 \cdot 3,14 \approx 48,984 \text{ mm}$

a) Hány fokos elfordulás kell egy új sorhoz?

A szöveg szerint 10 sor és 10 sorköz összesen 49 mm.

Ez azt jelenti, hogy egy egység (egy sor kinyomtatása + a sorköz a következőig) hossza:

$$s = 49 \text{ mm} : 10 = \mathbf{4,9 \text{ mm}}$$

Keressük azt az α szöveget, amelyhez 4,9 mm ívhossz tartozik:

$$\alpha = \frac{s \cdot 360^\circ}{K} = \frac{4,9 \cdot 360}{48,984} \approx \mathbf{36^\circ}$$

b) Teljes A/4-es lap (297 mm) továbbítása

- Elfordulás fokban:

$$\alpha_{\text{összes}} = \frac{297 \cdot 360}{48,984} \approx \mathbf{2183,57^\circ}$$

- Teljes fordulatok száma:

$$n = \frac{297}{48,984} \approx \mathbf{6,06 \text{ fordulat}}$$

c) Hányadik sornál tartunk 540° -os elfordulásnál?

Tudjuk az a) részből, hogy egy sorhoz 36° elfordulás kell.

$$N = \frac{540^\circ}{36^\circ} = \mathbf{15}$$

Mivel az első sor megkezdésétől számolunk, és pontosan 15 egységnyi elfordulás történt, a henger éppen a **15. sor végéhez**/a 16. sor elejéhez tekerte a papírt.

d) Másik nyomtató (d = 20,4 mm, 154° -os fordulat)

Itt a papír elmozdulását (s) keressük:

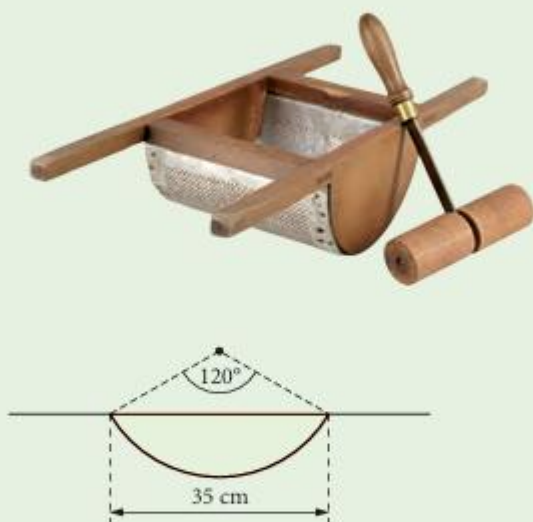
- Új kerület:

$$K_2 = 20,4 \cdot 3,14 = 64,056 \text{ mm}$$

- Elmozdulás:

$$s = \frac{K_2 \cdot \alpha}{360} = \frac{64,056 \cdot 154}{360} \approx \mathbf{27,4 \text{ mm}}$$

2. Majd 100 éves paradicsompasszírozó látható a fényképen. Ennek a tartályát 24 cm széles, téglalap alakú, lyukacsos fémlapból hajlították úgy, hogy végül hengerfelületet formázzon.



- a) Körülbelül hány centiméter hosszúságú téglalapról volt szükség az ábrán megadott méretű passzírozó szerkezet fémlapjának kialakításához?
- b) Mekkora területű a passzírozó körszelet alakú oldalfala?

Megoldás:

Ez a feladat a **körszelet** geometriájára épít. A passzírozó lyukacsos fémlemeze valójában egy hengerpalást egy darabja, az oldalfala pedig egy körszelet.

Adatok kinyerése az ábráról:

A "húr" hossza (a passzírozó szélessége): $h = 35$ cm

A középponti szög: $\alpha = 120^\circ$

A fémlap szélessége (a henger magassága): 24 cm

a) A téglalap alakú fémlap hosszúsága

A fémlap hossza megegyezik a körív hosszával (i).

Ehhez először szükségünk van a kör sugarára (r).

A húr, a két sugár és a középponti szög egy egyenlő szárú háromszöget alkot.

A középponti szög 120° .

Ha ezt a szöget elfelezzük a kör sugarával, akkor két darab 60° -os szöget kapunk.

Ha behúzzuk a 35 cm-es húr, egy olyan egyenlő szárú háromszöget kapunk, amelynek a szárai a sugarak (r), a szárszöge pedig 120°

Ha a háromszög alapjához (35 cm) tartozó magasságot behúzzuk, a háromszöget két olyan derékszögű háromszögre bontjuk, amelyeknek a szögei 30° és 60° . Az ilyen háromszög valójában egy szabályos háromszög fele.

A sugár (r) kiszámítása Pitagorasz-tétellel

Egy 30°-60°-90°-os háromszögben tudjuk, hogy:

- A 30°-os szöggel szemközti befogó (m) fele az átfogónak (r): $m = \frac{r}{2}$
- A hosszabbik befogó a húr fele: 17,5 cm
- Írjuk fel a Pitagorasz-tételt erre a kis háromszögre: $m^2 + 17,5^2 = r^2$
- Behelyettesítve az $m = \frac{r}{2}$ összefüggést:

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 + 17,5^2 = r^2$$

$$\frac{r^2}{4} + 306,25 = r^2$$

$$r^2 + 1225 = 4r^2$$

$$r^2 = 408,33$$

$$r = \sqrt{408,33} = 20,21 \text{ cm}$$

Most már kiszámolhatjuk az ívhosszat:

$$i = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{2 \cdot 20,21 \cdot 3,14 \cdot 120}{360} \approx 42,3 \text{ cm}$$

A fémlap hossza körülbelül 42,3 cm volt.

b) A körszelet alakú oldalfal területe

A körszelet területét (T_{sz}) úgy kapjuk meg, hogy a körcikk területéből (T_k) kivonjuk a háromszög területét (T_h).

Körcikk területe:

$$T_k = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{20,21^2 \cdot 3,14 \cdot 120}{360} \approx 427,5 \text{ cm}^2$$

Háromszög területe:

Ahogy az előző lépésben láttuk, a 120°-os középponti szögű háromszöget a magassága (m) két olyan derékszögű háromszögre bontja, amelyek szögei 30° és 60°.

Az alap (a): Ez a passzírozó szélessége, azaz a húr: 35 cm.

A magasság (m): Tudjuk, hogy a 30°-os szöggel szemközti befogó (m) pontosan a fele az átfogónak (r).

Az előbb kiszámoltuk, hogy $r = 20,21$ cm.

Ebből a magasság:

$$m = \frac{r}{2} = \frac{20,21}{2} = 10,105 \text{ cm}$$

Most már minden adatunk megvan a klasszikus területképlethez:

$$T_h = \frac{a \cdot m}{2}$$

$$T_h = \frac{35 \cdot 10,105}{2} = \frac{353,675}{2} \approx 176,84 \text{ cm}^2$$

Így a körszelet területe:

$$T_{sz} = T_k - T_h = 427,5 - 176,8 = 250,7 \text{ cm}^2$$

A passzírozó oldalfalának területe körülbelül 250,7 cm².

3  A Föld Nap körüli keringésének pályáját közelítsük egy olyan 150 millió km sugarú körrel, amelynek középpontjában a Nap áll! Tegyük föl továbbá, hogy a Föld egyenletes sebességgel halad a Nap körül.

- a)** Mekkora középponti szög tartozik ahhoz az ívhez, amelyet egy óra alatt befut a Föld?
- b)** Mekkora ívet fut be egy óra alatt a Föld?
- c)** Hány négyzetkilométer az egy óra alatt befutott ívhez tartozó körcikk területe?

Megoldás:

Ebben a csillagászati feladatban hatalmas számokkal fogunk dolgozni, de az alapelv ugyanaz marad, mint az előző példákban.

Adatok:

- Pálya sugara (r): $150\,000\,000\text{ km} = 1,5 \times 10^8\text{ km}$
- Keringési idő: A Föld 1 év alatt kerüli meg a Napot.
- Órák száma egy évben (átlagosan): $365 \times 24 = 8760\text{ óra}$

- a) Mekkora középponti szög (α) tartozik egy órához?

Mivel a teljes kör (360°) megtételéhez 8760 óra kell, az egy óra alatt megtett szög a teljes kör arányos része:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{1\text{ h}}{8760\text{ h}}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{8760\text{ h}} \approx 0,0411^\circ$$

- b) Mekkora ívet (i) fut be egy óra alatt?

$$i = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

$$i = \frac{2 \cdot 150\,000\,000 \cdot 3,14 \cdot 0,0411}{360}$$

$$i = \frac{300\,000\,000 \cdot 3,14 \cdot 0,0411}{360}$$

$$i = \frac{942\,000\,000 \cdot 0,0411}{360}$$

$$i = \frac{38\,716\,200}{360}$$

$$i \approx 107\,545\text{ km}$$

Egy óra alatt megtett ív kb. 107 545 km.

c) Körcikk területe számítása (t):

$$t = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

$$t = \frac{(150\,000\,000)^2 \cdot 3,14 \cdot 0,0411}{360}$$

$$t = \frac{22\,500\,000\,000\,000\,000 \cdot 3,14 \cdot 0,0411}{360}$$

$$t = \frac{70\,650\,000\,000\,000\,000 \cdot 0,0411}{360}$$

$$t = \frac{2\,903\,715\,000\,000\,000}{360}$$

$$t \approx 8\,065\,875\,000\,000 \text{ km}^2$$

A súrolt körcikk területe 8 065 875 000 000 km².

- 1.** Egy híd egyik vége rögzítve van, másik vége két egyenlő sugarú hengeren nyugszik. A hőmérséklet változásakor a híd hossza változik. Hány fokkal fordulnak el a 12,4 cm átmérőjű görgők, ha a híd hossza hőtágulás miatt 8 cm-rel megnő?



Megoldás:

Amikor a híd hossza 8 cm-rel megnyúlik, a híd vége elmozdul a görgők tetején, miközben a görgők alja elgurul a talajon.

Ez egy úgynevezett tiszta gördülés, ahol a görgő középpontja feleannyit halad, mint a híd vége.

Ahhoz, hogy a görgő elfordulását kiszámoljuk, azt kell tudnunk, hogy a görgő kerülete mentén mekkora utat tett meg a hídhoz képest.

Ebben az esetben a görgő palástján "legördült" ívhossz pontosan a híd megnyúlásának a fele lesz, azaz $i = 4 \text{ cm}$

Adatok:

- A híd megnyúlása: 8 cm
- Görgő ívhossza (elmozdulása): $i = 4 \text{ cm}$
- Görgő átmérője: $d = 12,4 \text{ cm}$
- Görgő kerülete: $K = d\pi \approx 38,396 \text{ cm}$

Így:

$$\alpha = \frac{i \cdot 360^\circ}{K}$$

$$\alpha = \frac{4 \cdot 360}{38,936}$$

$$\alpha = \frac{1440}{38,936}$$

$$\alpha \approx 36,98^\circ$$

Tehát körülbelül 37° -os szöggel fordulnak el.

- 2** A Hold pályáját közelítsük egy Föld középpontú, 384 ezer km sugarú körrel! A Hold keringési ideje 27,3 nap, és feltesszük, hogy a keringési sebesség állandó.



- a) Mekkora középponti szög tartozik ahhoz az ívhez, amelyet egy óra alatt befut a Hold?
b) Mekkora ívet fut be egy óra alatt a Hold?
c) Hány négyzetkilométer az egy óra alatt befutott ívhez tartozó körcikk területe?

Megoldás:

Adatok:

- Pálya sugara (r): 384 000 km
- Keringési idő: 27,3 nap
- Keringési idő órában (T): $27,3 \cdot 24 = 655,2$ óra
- Használjuk a $\pi \approx 3,14$

- a) Mekkora középponti szög (α) tartozik egy órához?

Mivel a Hold 655,2 óra alatt teszi meg a teljes kört (360°), egy óra alatt a szögelfordulás:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{1 \text{ h}}{655,2 \text{ h}}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{655,2 \text{ h}} \approx 0,5494^\circ$$

- b) Mekkora ívet (i) fut be egy óra alatt?

Számoljuk ki először a pálya teljes területét (K):

$$K = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 384\,000 \cdot 3,14 = 2\,411\,520 \text{ km}$$

Az egy óra alatt megtett út ennek a 655,2-ed része:

$$i = \frac{2\,411\,520}{655,2} \approx 3680,58 \text{ km}$$

Levezetés ívhossz képlettel is:

$$i = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

$$i = \frac{2 \cdot 384\,000 \cdot 3,14 \cdot 0,5494}{360} \approx 3680,4 \text{ km}$$

- c) Hány négyzetkilométer a befutott körcikk területe?

Használjuk az egyszerűsített összefüggést:

$$t = \frac{r \cdot i}{2}$$

$$t = \frac{3680,58 \cdot 384\,000}{2} = 3680,58 \cdot 192\,000$$

$$t \approx \mathbf{706\,671\,360\,km^2}$$

Levezetés körcikk területképlettel is:

$$t = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360} = \frac{384\,000^2 \cdot 3,14 \cdot 0,5494}{360} \approx \mathbf{706\,638\,105\,km^2}$$
